Matrixwertige Reihen: Wir versehen den Raum der komplexen $m\times n$-Matrizen mit der Norm $\|(a_{i,j})_{i,j}\| := \sqrt{\sum_{k,\ell}|a_{k\ell}|^2}$. (Vergleiche Abschnitt 10.2.)

Bem.: $\forall k,\ell: |a_{k\ell}| \leq \|A\|$.

Proposition: Für jede komplexe $\ell\times m$-Matrix A und jede komplexe $m\times n$-Matrix B gilt $\|AB\| \leqslant \|A\|\cdot\|B\|$.

Bew.: $A=(a_{ij})_{i,j}$, $B=(b_{jk})_{j,k}$ $\Rightarrow$ $AB = \left(\sum_j a_{ij}b_{jk}\right)_{i,k}$

Cauchy-Schwarz: $\forall x_j, y_j \in \mathbb{C}$:

$$\Big|\sum_j x_j y_j\Big|^2 \leq \Big(\sum_j |x_j|^2\Big)\cdot\Big(\sum_j |y_j|^2\Big).$$

$$\Rightarrow \|AB\|^2 = \sum_{i,k}\Big|\sum_j a_{ij}b_{jk}\Big|^2$$

$$\leq \sum_{i,k}\Big(\sum_j |a_{ij}|^2\Big)\cdot\Big(\sum_j |b_{jk}|^2\Big)$$

$$= \Big(\sum_{i,j}|a_{ij}|^2\Big)\cdot\Big(\sum_{j,k}|b_{jk}|^2\Big) = \|A\|^2\cdot\|B\|^2$$

qed.

Proposition: Für alle komplexen $n \times n$-Matrizen A und B gilt:

(a) Für jedes $k \geqslant 1$ gilt $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$.

(b) Die folgende matrixwertige Reihe ist absolut konvergent:

$$\exp(A) := \boxed{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}} = I_n + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \dots.$$

(c) Ist B invertierbar, so gilt $\exp(B^{-1}AB) = B^{-1} \cdot \exp(A) \cdot B$.

(d) Gilt $AB = BA$, so ist $\exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$.

(e) Die Matrix $\exp(A)$ ist invertierbar mit $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

Bew.: (a) $k=1$ tautologisch. $k \rightsquigarrow k+1$: $\|A^{k+1}\| = \|A \cdot A^k\| \leq \|A\| \cdot \|A^k\| \overset{IA}{\leq} \|A\| \cdot \|A\|^k = \|A\|^{k+1}$.

(b) $\left\|\frac{A^m}{m!}\right\| = \frac{\|A^m\|}{m!} \leq \frac{\|A\|^m}{m!} = \frac{c^m}{m!}$ $\Rightarrow$ abs. Konvergenz nach Majorantenkriterium.

$\Rightarrow$ Koeffizienten $\frac{A^m}{m!}$ sind $\leq \frac{c^m}{m!}$

(c) $\exp(B^{-1}AB) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(B^{-1}AB)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} B^{-1} \cdot \frac{A^m}{m!} \cdot B = B^{-1} \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}\right) \cdot B = B^{-1} \cdot \exp(A) \cdot B$.

(d) $\exp(A+B) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(A+B)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m!} \cdot \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cdot A^{m-k} \cdot B^k\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{k+l=m \\ k,l \geq 0}} \frac{A^l}{l!} \cdot \frac{B^k}{k!}\right)$

$= \sum_{l \geq 0} \frac{A^l}{l!} \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{B^k}{k!} = \exp(A) \cdot \exp(B)$.

(e) $\exp(A)\cdot\exp(-A) \overset{(d)}{=} \exp(A-A) = \exp(0) = I_n + O_n + O_n + \ldots = I_n$. qed.

Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten: Eine vektorwertige Differentialgleichung $\boxed{\frac{dv}{dx} = Av}$ mit $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ und Anfangswert $v(0) = v_0 \in \mathbb{C}^n$ besitzt die eindeutige Lösung $v(x) = \exp(Ax)v_0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow v(0) = \exp(A\cdot 0)\cdot v_0 = I_n \cdot v_0 = v_0$.

$$\frac{d}{dx}(\exp(Ax)v_0) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(Ax)^m}{m!}\cdot v_0\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A^m}{m!}v_0\cdot x^m\right)$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{A^m}{m!}v_0\cdot m x^{m-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^{k+1}x^k}{k!}\cdot v_0 = A\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Ax)^k}{k!}v_0 = A\cdot v$$

qed

Eine skalarwertige Differentialgleichung $\frac{d^n y}{dx^n} = a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y$ der Ordnung n mit konstanten Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ übersetzt man in die vektorwertige Differentialgleichung $\frac{dv}{dt} = Av$ der Ordnung 1 mit

$$\boxed{v := \begin{pmatrix} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \\ \vdots \\ \frac{dy}{dx} \\ y \end{pmatrix}} \quad \text{und} \quad A := \begin{pmatrix} a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{pmatrix}.$$

$$\frac{dv}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{d^n y}{dx^n} \\ \vdots \\ \frac{dy}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-1} & \ldots & & a_0 \\ 1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \\ \vdots \\ y \end{pmatrix} = A\cdot v.$$

Begleitmatrix des Polynoms $T^n - a_{n-1}T^{n-1} - \ldots - a_0$

$=$ char. Pol. von A.

Bsp.: $y''' = 7y'' - 16y' + 12y \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 7 & -16 & 12 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$T^3 - 7T^2 + 16T - 12 = (X-2)^2(X-3)$ = char. & Minimalpolynom von A

$\Rightarrow$ JNF von A ist $J = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$; $A = UJU^{-1}$, $U \in GL_3(\mathbb{R})$

$$J^k = \left(\begin{array}{c|cc} 3^k & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{array}\right) \Rightarrow \exp(Jx) = \sum_{k\geq 0} \frac{J^k x^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} \left(\begin{array}{c|cc} \frac{3^k x^k}{k!} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2^k x^k}{k!} & \frac{k 2^{k-1} \cdot x^k}{k!} \\ 0 & 0 & \frac{2^k x^k}{k!} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} \exp(3x) & 0 & 0 \\ \hline 0 & \exp(2x) & \exp(2x)\cdot x \\ 0 & 0 & \exp(2x) \end{array}\right)$$

$$\sum_{k\geq 0} \frac{k 2^{k-1} x^k}{k!} = \sum_{k\geq 1} \frac{2^{k-1} x^{k-1}}{(k-1)!} \cdot x = \exp(2x)\cdot x$$

Linearkombination von e^{3x}, e^{2x}, $x \cdot e^{2x}$

$$v = \exp(Ax)v_0 = \exp(UJxU^{-1})v_0 = U \cdot \exp(Jx)U^{-1}v_0$$

$= \mathbb{R}$-Linearkombination von $e^{3x}, e^{2x}, x\cdot e^{2x}$.

$\Rightarrow \quad y = \quad \cdots \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad .$

Hier ist A^T die Begleitmatrix des Polynoms $f(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \ldots - a_0$, hat also dieses Polynom als Minimal- und charakteristisches Polynom; daher hat A genau einen Jordanblock zu jedem irreduziblen Faktor von f. Ist also $f(X) = \prod_{j=1}^{r}(X - \lambda_j)^{n_j}$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_j \in \mathbb{C}$, so hat A die Jordannormalform $U^{-1}AU = J = \mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_r)$ mit je einem Jordanblock J_j der Grösse n_j zum Eigenwert λ_j. Somit ist $v(x) = U \cdot \mathrm{diag}(\exp(J_1x), \ldots, \exp(J_kx)) \cdot U^{-1}v_0$. Mit der Notation von oben gilt weiter

$$\exp(J_jx) \;=\; \exp(\lambda_jx \cdot I_{n_j} + xN_{n_j}) \;=\; \exp(\lambda_jx \cdot I_{n_j}) \cdot \exp(xN_{n_j}) \;=\; e^{\lambda_jx} \cdot \sum_{\ell=0}^{n_j-1} \frac{x^\ell}{\ell!} \cdot N_{n_j}^\ell.$$

Daher ist

$$y(x) \;=\; \sum_{j=1}^{r}\sum_{\ell=0}^{n_j-1} c_{j,\ell}\, \boxed{x^\ell \cdot e^{\lambda_jx}}$$

mit geeigneten Koeffizienten $c_{j,\ell} \in \mathbb{C}$. Umgekehrt ist jede so definierte Funktion eine Lösung der Differentialgleichung.

$$\exp\begin{pmatrix} J_1x & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_rx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(J_1x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(J_rx) \end{pmatrix}$$

$$N_{n_j} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}}_{n_j} \Big\} n_j$$

$$\exp(xN_{n_j}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(xN_{n_j})^\ell}{\ell!} = \sum_{\ell=0}^{n_j-1} \frac{x^\ell}{\ell!} \cdot N_{n_j}^\ell$$

10 Euklidische Vektorräume

10.1 Normierte Körper

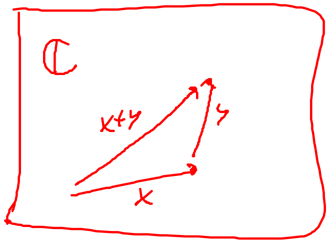
Sei K ein Körper.

Definition: Eine *Norm auf K* ist eine Abbildung

$$|\ \ |\colon\ K \to \mathbb{R}^{\geqslant 0},\quad x \mapsto |x|$$

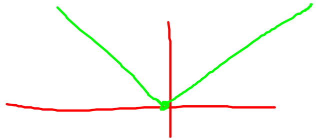
mit den folgenden Eigenschaften für alle $x, y \in K$:

(a)	$\lvert x\rvert = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$	(Separiertheit)
(b)	$\lvert x \cdot y\rvert \;=\; \lvert x\rvert \cdot \lvert y\rvert$	(Multiplikativität)
(c)	$\lvert x + y\rvert \;\leqslant\; \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	(Dreiecksungleichung)



Ein Körper zusammen mit einer Norm heisst ein *normierter Körper* $(K, |\ \ |)$.

Beispiel: Die *Standard-Norm* auf $\mathbb{R}$ ist der Absolutbetrag



$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}, \ x \mapsto \begin{cases} x & \text{falls } x \geqslant 0, \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Beispiel: Die *Standard-Norm* auf $\mathbb{C}$ ist der Absolutbetrag

$$\mathbb{C} \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}, \ z \mapsto |z| := \sqrt{z\bar{z}}.$$

Wenn nichts anderes gesagt wird, meinen wir mit $|\ \ |$ die Standard-Norm auf $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Beispiel: Die *triviale Norm* auf einem beliebigen Körper K ist die Abbildung

$$\boxed{K \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}, \quad x \mapsto |x| := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ 1 & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}}$$

Lemma: Für alle reelle Zahlen $\alpha, \beta \geqslant 0$ und $p \geqslant 1$ gilt $\alpha^p + \beta^p \leqslant (\alpha + \beta)^p$.

Proposition: Für jede Norm $|\ \ |$ auf K und jede reelle Zahl $0 < c \leqslant 1$ ist auch die Abbildung $x \mapsto |x|^c$ eine Norm auf K.

(a) $|x|^c = 0 \iff |x| = 0 \iff x = 0.$

(b) $|xy|^c = (|x| \cdot |y|)^c = |x|^c \cdot |y|^c$

(c) $|x+y|^c \overset{?}{\leq} |x|^c + |y|^c = \alpha + \beta$

$\iff |x+y| \leq (\alpha+\beta)^{1/c} = (\alpha+\beta)^p$

$\alpha := |x|^c \Rightarrow |x| = \alpha^p$

$\beta := |y|^c \Rightarrow |y| = \beta^p$

$p := 1/c$

$|x+y| \leq |x| + |y| = \alpha^p + \beta^p \overset{!}{\leq} (\alpha+\beta)^p.$

$\Rightarrow |x+y|^c \leq \alpha + \beta = |x|^c + |y|^c.$ $\quad (\alpha+\beta)^{1/c}$ qed.

Bemerkung: Weitere interessante Normen, insbesondere auf dem Körper $\mathbb{Q}$, werden in Algebra I behandelt.

10.2 Normierte Vektorräume

Sei $(K, |\ \ |)$ ein normierter Körper, und sei V ein K-Vektorraum.

Definition: Eine *Norm auf V* ist eine Abbildung

$$\|\ \ \|\colon\ V \to \mathbb{R}^{\geqslant 0},\quad v \mapsto \|v\|$$

mit den folgenden Eigenschaften für alle $v, v' \in V$ und $x \in K$:

$$\begin{aligned} \|v\| = 0 \ &\Leftrightarrow\ v = 0 && \text{(Separiertheit)} \\ \|x \cdot v\| \ &= \ |x| \cdot \|v\| && \text{(Multiplikativität)} \\ \|v + v'\| \ &\leqslant \ \|v\| + \|v'\| && \text{(Dreiecksungleichung)} \end{aligned}$$

Ein Vektorraum zusammen mit einer Norm heisst ein *normierter Vektorraum* $(V, \|\ \ \|)$.

Variante: Eine Abbildung, die alle obigen Eigenschaften ausser möglicherweise die Separiertheit erfüllt, heisst eine *Seminorm auf V*.

Bsp.: $V = \{$ beschränkten Funktionen $[a,b] \to \mathbb{R}$, stetig ausserhalb endlich vieler Punkte $\}$.

$$|f| := \int_a^b |f(x)|\,dx \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & x = a \\ 0 & x \neq a \end{cases} \Rightarrow |f| = 0.$$